Leonardo Fibonacci et les suites

Dès la classe de 1ère , on commence l'étude systématique des suites de nombres. On connaît bien sûr, depuis longtemps, la plus simple : 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, celle des entiers naturels.
En 1202, Leonardo Fibonacci a introduit la suite d'entiers : 0, 1, 1, 2, 3 , 5, 8, 13, …, où chaque nombre est la somme des deux qui le précèdent. L'étude de cette suite a été, et reste, particulièrement fructueuse dans de nombreux problèmes.

***Leonardo Fibonacci (1170-1250)***

**Né à Pise.**

**Fibonacci imagina un jour un problème sur la prolifération des lapins.**
**« Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second mois de son existence ? ».**
**Pour la résolution, il utilisa la suite qui porte son nom.**
**Il est surprenant qu'un anodin problème de lapins ait pu générer une suite de nombres aussi remarquable !**

Nous utiliserons ici la notation des suites introduite au 18ème siècle par Joseph Lagrange :
$f_1$, $f_2$ et $f_n$ désignent respectivement le premier, le deuxième et le $n$ ième terme de la suite.
La suite de Fibonacci est alors définie par :
$f_1 = 0$ , $f_2 = 1$, et, pour $n > 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.
En utilisant la suite de Fibonacci, Edouard Lucas trouva, en 1876, un critère pour tester la primalité des nombres de la forme $2^n - 1$.
Les nombres de la forme $2^n - 1$, où $n$ est un entier, ont été étudiés pour la première fois par Marin Mersenne en 1644. En utilisant la notation des suites, on les note :
$M_n = 2^n - 1$.
Si n n'est pas premier alors $M_n$ n'est pas premier, mais la réciproque est fausse.
$M_2 = 2^2 - 1 = 3$,
$M_3 = 2^3 - 1 = 7$,
$M_5 = 2^5 - 1 = 31$,
$M_7 = 2^7 - 1 = 127$.
$M_2$, $M_3$, $M_5$ et $M_7$ sont premiers mais $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$ est divisible par 23 et par conséquent, non premier.
A l'aide de son critère, Edouard Lucas démontra que $M_{13}$, $M_{17}$, $M_{19}$, $M_{31}$, $M_{61}$, $M_{89}$, $M_{107}$, ainsi que $M_{127}$, un nombre de 39 chiffres, sont des nombres premiers.
Avec l'avènement des ordinateurs, le test de Lucas a permis de trouver d'autres nombres de Mersenne premiers.
En 2006, on ignore si l'ensemble des nombres de Mersenne premiers est fini ou infini.