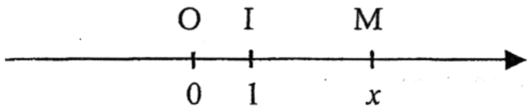
Carl Friedrich Gauss et les nombres imaginaires

Dès la classe de 3ème, on sait que $\sqrt{a}$, la racine carrée de a, n'a de sens que pour un nombre a positif. On sait aussi que les nombres usuels, rationnels ou irrationnels, peuvent être représentés comme les points d'une droite.

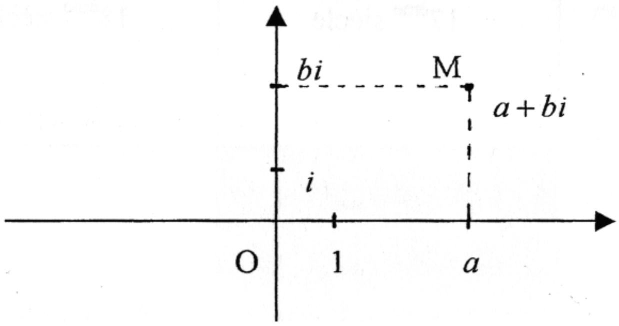
Sur une droite graduée, au nombre x correspond un point M, d'abscisse x, et réciproquement.



En 1545, Gerolamo Cardano pose le problème suivant : « Diviser 10 en deux parties telles que le produit des parties soit 40 ». **[2]**
Il trouve les deux quantités voulues qu'il écrit sous une forme qui transgresse les règles en vigueur : $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$.
Il justifie pourtant que leur somme vaut bien 10 : $5+\sqrt{-15}+5-\sqrt{-15}=10$, et que leur produit vaut bien 40 : $(5+\sqrt{-15})\times(5-\sqrt{-15}) = 5^2-(\sqrt{-15})^2 = 25-(-15) = 25+15 = 40$.
En 1572, Rafaele Bombelli généralise ce résultat et introduit les nombres « imaginaires» de la forme : $a+b\sqrt{-1}$, avec : $(\sqrt{-1})^2 = -1$. a et b sont des nombres usuels ou « réels », par opposition à « imaginaires ». $\sqrt{-1}$ a désormais ses propres règles d'utilisation.
En 1777, Leonhard Euler propose de représenter par la lettre i le plus simple des nombres imaginaires : $i=\sqrt{-1}$.
En 1835, Carl Friedrich Gauss donne une définition et une représentation géométrique des nombres imaginaires. Ils sont enfin acceptés comme nombres par les mathématiciens.

Les nombres imaginaires $a+bi$ sont des couples $(a;b)$ de nombres réels, avec : $i=(0;1)$ et $i^2=(0;1)^2=(-1;0)=-1$. Le couple $(a;0)$ n'est autre que le nombre réel a.
Les nombres imaginaires peuvent donc être représentés par les points d'un plan.

Dans un plan muni d'un repère, au nombre imaginaire $a+bi$ correspond un point M de coordonnées $(a;b)$, et réciproquement.



Les opérations effectuées sur les nombres imaginaires peuvent de même être décrites par des transformations géométriques.
On passe du point P au point P' par un demi-tour. La multiplication par -1 correspond à un demi-tour : $1\times(-1)=-1$.
On passe du point P au point Q par un quart de tour. La multiplication par i correspond à un quart de tour : $1\times i = i$.
Deux quarts de tour successifs reviennent à un demi-tour : $i^2=-1$.